تمرين: ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبور لي غامر
عندئذ: $f(J(A)) \subseteq J(A')$
أي مثالي قابل للحل مثالي قابل للحل وصورته مثالي قابل للحل

تمرين 1: ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبور لي غامر و B مثالي في A' أثبت أن $f^{-1}(B)$ مثالي في A

الحل:

$f^{-1}(B)$ جبر لي جزئي في A

$\forall a \in A$; $d_a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(B)$ ← شرط الجبر الجزئي

ليكن $a \in A$ ، $y \in d_a(f^{-1}(B))$ ومنه يوجد $x \in f^{-1}(B)$ بحيث $y = d_a(x)$

$\Rightarrow f(x) \in B$

$$f(y) = f(d_a(x)) = f([a, x]) = [\underbrace{f(a)}_{A'}, f(x)]$$

$$= d_{f(a)}(f(x)) \in B \Rightarrow y \in f^{-1}(B)$$

أي أن $f^{-1}(B)$ مثالي في A.

تمرين 2: ليكن A جبر لي فوق الحقل R ، I مثالي في A يحقق

$$[I, I] = I$$

أثبت أن المثالي I مميز في A.

الحل:

1 - I مثالي في A

2 - ليكن d تطبيق اشتقاق (ليس بالضرورة داخلي)

ولنثبت $d(I) \subseteq I$

$y \in d(I) \Rightarrow \exists x \in I$; $y = dx$

$x = [a, b]$ $a, b \in I$ لأن $x \in I$

$y = d[a, b] = [d(a), b] + [a, db]$

الموضوع :

$= \sout{d_b(d_a(a)) + d_a(d_b(b))}\ d_{d_A(a)}(b) - d_{d_A(b)}(a) \in I$

$d_{d_A(a)} \in \tilde{A}$, $b \in I$, $d_{d_A(b)} \in \tilde{A}$, $a \in I$

أي أن I مثالي مميز في A.

تمرين [2] لتكن A جبر لي فوق حقل R و $x_1, x_2, x_3, x_4 \in A$

أثبت أن

$[[[x_1,x_2],x_3],x_4] + [[[x_2,x_1],x_4],x_3]$ [1] [2]

$+ [[[x_3,x_4],x_1],x_2] + [[[x_4,x_3],x_2],x_1] = 0$ [3] [4]

الحل:

[1]: $[[[x_1,x_2],x_3],x_4] = + [x_4,[x_3,[x_1,x_2]]]$

[2]: $[[[x_2,x_1],x_4],x_3] = [x_3,[x_4,[x_2,x_1]]]$

[3] $[[[x_3,x_4],x_1],x_2] = [x_2,[x_1,[x_3,x_4]]]$

[4] $[[[x_4,x_3],x_2]x_1] = [x_1,[x_2,[x_4,x_3]]]$

$\Rightarrow \underbrace{[x_4,[x_3,[x_1,x_2]]]}_{[5]} + [x_3,[x_4,[x_2,x_1]]]$

$+ \underbrace{[x_2,[x_1,[x_3,x_4]]]}_{[6]} + [x_1,[x_2,[x_4,x_3]]] = 0$ ★

[5]: $[x_4,[x_3,[x_1,x_2]]] + [x_3,[[x_1,x_2],x_4]]$

$+ [[x_1,x_2],[x_4,x_3]] = 0$

[5]:

$\Rightarrow [x_4,[x_3,[x_1,x_2]]] = -[x_3,[[x_1,x_2],x_4]]$

الموضوع:

/ /

$-[[x_1,x_2],[x_4,x_3]]$

(6) $[x_2,[x_1,[x_3,x_4]]]+[x_4,[[x_3,x_4],x_2]]$

$+[[x_3,x_4],[x_2,x_1]]=0$

$\Rightarrow$ (6) $[x_2,[x_1,[x_3,x_4]]]=-[x_4,[[x_3,x_4],x_2]]-[[x_3,x_4],[x_2,x_1]]$

نعوض عن (5) و (6) في العلاقة *

$[x_3,[x_4,[x_2,x_1]]]+[x_3,[x_4,[x_1,x_2]]]-[[x_1,x_2],[x_4,x_3]]$

$+[x_1,[x_2,[x_4,x_3]]]+[x_1,[x_2,[x_3,x_4]]]$

$-[[x_3,x_4],[x_2,x_1]]=0$

* تعريف:

ليكن A جبر لي فوق الحقل R ، J مثالي في A عندئذ:

فإن المجموعة

$Z(J)=\{a;a\in A;[a,z]=0\ \forall z\in J\}$

مثالي في A ((نسمي $Z(J)$ مركز J في A))

البرهان:

$Z(J)\neq\phi$ لأن

$0\in A;[0,z]=0\quad\forall z\in J$

$\forall\alpha,\beta\in R;\quad a,b\in Z(J)$

$\alpha a+\beta b\ \in Z(J)$??

$\forall z\in J;[\alpha a+\beta b,z]=[\alpha a,z]+[\beta b,z]$

$=\alpha[a,z]+\beta[b,z]=0$

الموضوع: ....

$\Leftarrow$ $Z(J)$ محمول جزئي في A

$\forall a \in A ;\ d_a(Z(J)) \subseteq Z(J)$

$x \in d_a(Z(J))$ ، $x = d_a(y)$, $y \in Z(J)$

$[x, z] = [d_a(y), z]$

$d_a[y, z] = [d_a(y), z] + [y, d_a(z)]$

$[d_a(y), z] = d_a[y, z] - [y, \underbrace{d_a(z)}_{\in J}]$

$\overset{\shortparallel}{0}$

$y \in Z(J)$; $[y, z] = 0$ $d_a([y, z]) = 0$

$d_a(z) \in J$

$[y, d_a(z)] = 0$

$[x, z] = [d_a(y), z] = 0$

$\forall a \in A .\ d_a(Z(J)) \subseteq Z(J)$ $\Leftarrow$

الموضوع: / /

الجداء المباشر لجبور لي

تمهيد: ليكن A_1, A_2 جبري لي فوق الحقل K ، المجموعة $A_1 \times A_2$ حيث:

$$A_1 \times A_2 = \{(a,b) ; a \in A_1 , b \in A_2\}$$

تشكل جبر لي فوق K بالنسبة للعمليات الآتية:

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$$

$$a_1, b_1 \in A_1 , a_2, b_2 \in A_2$$

- $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2)$
- $\forall \lambda \in K ; \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1 , \lambda a_2)$
- $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = ([a_1, b_1], [a_2, b_2])$

البرهان:

بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب لعناصر من K فإن $A_1 \times A_2$ تشكل فضاء شعاعي فوق K.

لنثبت أنه جبر لي:

1) $[(a_1, a_2), (a_1, a_2)] = ([a_1, a_1], [a_2, a_2])$

$= (0, 0)$

2) $[(a_1, a_2) + (b_1, b_2), (c_1, c_2)] = [(a_1 + b_1 , a_2 + b_2), (c_1, c_2)]$

$= ([a_1 + b_1, c_1], [a_2 + b_2, c_2]) = ([a_1, c_1] + [b_1, c_1], [a_2, c_2] + [b_2, c_2])$

$= ([a_1, c_1], [a_2, c_2]) + ([b_1, c_1], [b_2, c_2])$

/ /

الموضوع :

$= [(a_1, a_2), (c_1, c_2)] + [(b_1, b_2), (c_1, c_2)]$

بطريقة مشابهة نحصل على الشرط الآخر لتوزيع الضرب على الجمع

$\forall \alpha \in \Lambda \quad (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$

$\alpha[x, y] = [\alpha x, y] = [x, \alpha y]$

$\alpha[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = \alpha([a_1, b_1], [a_2, b_2])$

$= (\alpha[a_1, b_1], \alpha[a_2, b_2]) = ([\alpha a_1, b_1], [\alpha a_2, b_2])$

$= [(\alpha a_1, \alpha a_2), (b_1, b_2)] = [\alpha(a_1, a_2), (b_1, b)]$

لتكن $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A_1 \times A_2$

$[(a_1, a_2), [(b_1, b_2), (c_1, c_2)]] + [(b_1, b_2), [(c_1, c_2), (a_1, a_2)]]$ ① ②

$+ [(c_1, c_2), [(a_1, a_2), (b_1, b_2)]] = 0$ ③ ??

① $[(a_1, a_2), ([b_1, c_1], [b_2, c_2])] = ([a_1, [b_1, c_1]], [a_2, [b_2, c_2]])$

② $[(b_1, b_2), [(c_1, c_2), (a_1, a_2)]] = [(b_1, b_2), ([c_1, a_1], [c_2, a_2])]$

$= ([b_1, [c_1, a_1]], [b_2, [c_2, a_2]])$

③ $[(c_1, c_2), ([a_1, b_1], [a_2, b_2])] = ([c_1, [a_1, b_1]], [c_2, [a_2, b_2]])$

نعوض في المساواة.